Ejercicios Lección n°8: Densidad, Espacios Locales

EPN, verano 2009

Ejercicio 1 — Densidad

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Decir si las aserciones siguientes son verdaderas o falsas. Justificarlo.

1. El espacio $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ es denso en $L^p(X, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$.
2. El espacio $\mathcal{S}_I(X, \mathbb{K})$ es denso en $L^\infty(X, \mathbb{K})$.
3. El espacio $L^\infty(X, \mathbb{K})$ es denso en $L^p(X, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$.
4. El espacio es $L^p(X, \mathbb{K})$ con $1 \leq p < +\infty$ denso en $L^\infty(X, \mathbb{K})$.
5. El espacio $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{K})$ es denso en $\mathcal{C}^0_0(X, \mathbb{K})$.
6. El espacio $\mathcal{C}^0_c(X, \mathbb{K})$ es denso en $L^\infty(X, \mathbb{K})$.

Ejercicio 2 — Densidad en los espacios de sucesiones

Sea el espacio $X = \mathbb{N}$ o $\mathbb{Z}$ dotado de su estructura de espacio medido natural. El conjunto formado por las sucesiones de tipo $e(j) = (\delta_{ij})_{j\in X}$ en donde δ_{ij} es la delta de Kronecker, es decir $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$ y $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$, es llamada la *base canónica* de los espacios de sucesiones.

1. Si $1 \leq p < +\infty$, mostrar que la base canónica de sucesiones $(e(j))_{j\in X}$ es un sistema total en $\ell^p(X, \mathbb{K})$.
2. Mostrar que los espacios $\ell^p(X, \mathbb{K})$ son separables.
3. Verificar que el conjunto formado por las funciones características $(\mathbb{1}_A)_{A\in\mathcal{P}(X)}$ es un sistema total en el espacio $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$.
4. Mostrar que si el conjunto X es de cardinal infinito, entonces el espacio $\ell^\infty(X, \mathbb{K})$ no es separable.
5. Verificar que la sucesión canónica es total en $c_0(X, \mathbb{K})$.

Ejercicio 3 — Independencia

Mostrar que la estructura de los espacios de funciones localmente integrables es independiente de la sucesión de compactos escogida.

Ejercicio 4 — Caracterización

Este ejercicio proporciona una caracterización de los espacios de funciones locales $L^p_{loc}(X, \mathbb{R})$ con $1 \leq p \leq +\infty$ utilizando las funciones continuas a soporte compacto $\mathcal{C}^0_c(X, \mathbb{R})$. Sea pues X un espacio separado localmente compacto a base numerable y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular.

1. Sea $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ una función μ-medible que pertenece al espacio $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ y sea φ una función del espacio $\mathcal{C}^0_c(X, \mathbb{R})$. Mostrar que $\|f\varphi\|_{L^p} < +\infty$.
2. Sea K un compacto de X. Utilizando el lema de Urysohn mostrar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}^0_c(X, \mathbb{R})$ tal que $\|f\|_{L^p(K)} \leq \|f\varphi\|_{L^p} < +\infty$.
3. Utilizando los dos puntos precedentes, mostrar que una función f pertenece al espacio $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ si y solo si el producto $f\varphi$ pertenece al espacio $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{R})$ para toda función $\varphi \in \mathcal{C}^0_c(X, \mathbb{R})$.

Ejercicio 5 — Densidad L^p y L^p_{loc}

Sea $1 \leq p < +\infty$ un real. Sea X un espacio topológico separado localmente compacto a base numerable y sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido regular. Mostrar que los espacios de Lebesgue $L^p(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$ son densos en los espacios $L^p_{loc}(X, \mathscr{A}, \mu, \mathbb{K})$.

Ejercicio 6 — Espacios de funciones localmente uniformemente integrables

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido y sea $1 \leq p \leq +\infty$. Definimos el espacio de funciones localmente uniformemente integrables como:

$$L^p_{uloc}(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_{L^p_{uloc}} = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left(\int\limits_{\{|x-y|<1\}} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < +\infty \right\}$$

1. Mostrar que la cantidad $\|\cdot\|_{L^p_{uloc}}$ es una norma.
2. Si $p = +\infty$ verificar que $L^\infty_{uloc} = L^\infty$.
3. Mostrar que se tienen las inclusiones
$$L^p \subset L^p_{uloc} \subset L^p_{loc}$$
4. Verificar que $L^\infty \subset L^p_{uloc}$ para todo $1 \leq p < +\infty$.

Ejercicio 7 — Espacio WL^∞

Sea $(X, \mathscr{A}, \mu)$ un espacio medido. Definimos el espacio WL^∞ como:

$$WL^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{K}) = \left\{ f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{K} : \|f\|_{WL^\infty} = \sum_{k \in \mathbb{R}^n} \sup_{x-k \in [0,1]^n} |f(x)| < +\infty \right\}$$

1. Verificar que la cantidad $\|\cdot\|_{WL^\infty}$ es una norma.
2. Mostrar que se tiene la inclusión $WL^\infty \subset L^\infty$.
3. ¿Para qué valores de $p \in [1, +\infty[$ se tiene la inclusión $WL^\infty \subset L^p$?
4. ¿Se tiene la inclusión $L^p \subset WL^\infty$ con $p \in [1, +\infty[$?