

Índice general

Prefacio	v
1. Espacios métricos, normados y de Banach	1
1.1. Espacios topológicos y espacios métricos	1
1.1.1. Definiciones	2
1.1.2. Límites y continuidad	5
1.1.3. Propiedades uniformes	7
1.2. Compacidad	11
1.2.1. Espacios compactos	11
1.2.2. Compacidad en los espacios métricos	15
1.2.3. Espacios localmente compactos	18
1.3. Espacios localmente convexos y espacios de Fréchet	19
1.3.1. Preliminares	20
1.3.2. Semi-normas	21
1.3.3. Espacios definidos por familias de semi-normas	22
1.4. Espacios normados y espacios de Banach	29
1.4.1. Definiciones	30
1.4.2. Tres ejemplos clásicos	35
1.4.3. Propiedades básicas	36
1.4.4. Equicontinuidad y teorema de Ascoli-Arzelá	39
1.5. Ejercicios	42
2. Teoría de la medida	49
2.1. Álgebras y funciones aditivas de conjuntos	50
2.1.1. Preliminares	50
2.1.2. Definiciones y ejemplos elementales	51
2.2. σ -álgebras y medidas	57
2.2.1. σ -álgebras	58
2.2.2. Medidas sobre σ -álgebras	65
2.2.3. Clases monótonas	74
2.3. Medidas exteriores	79
2.3.1. Definiciones y propiedades	79
2.3.2. Teoremas de prolongación de medidas	84
2.3.3. Completación de medidas	92
2.4. Medidas Borelianas	96
2.4.1. Rápida descripción de los conjuntos Borelianos	96
2.4.2. Regularidad de las medidas Borelianas	98
2.4.3. Construcción y propiedades de la medida de Lebesgue	104
2.4.4. Conjuntos no medibles	111
2.5. Ejercicios	114

3. Teoría de la integración	121
3.1. Las limitaciones de la integral de Riemann	122
3.2. Teoría de la integración de Lebesgue	125
3.2.1. Funciones medibles	125
3.2.2. Propiedades válidas en μ -casi todas partes	134
3.2.3. Construcción de la integral de Lebesgue	137
3.2.4. Espacio de funciones integrables	147
3.2.5. Integración en un subconjunto	152
3.3. Teoremas clásicos de la teoría de la integración	157
3.3.1. Convergencia monótona	157
3.3.2. Lema de Fatou	159
3.3.3. Convergencia dominada	160
3.3.4. Integrales dependientes de un parámetro	163
3.3.5. Modos de convergencia	168
3.4. Integración en los espacios producto	177
3.4.1. σ -álgebras producto	178
3.4.2. Medidas producto	182
3.4.3. Teoremas de Fubini-Tonelli	185
3.4.4. Integrales múltiples	190
3.5. Relaciones entre la integral de Riemann y de Lebesgue	192
3.5.1. Cuando la integral de Riemann y de Lebesgue coinciden	193
3.5.2. Teoremas fundamentales del cálculo integral	195
3.5.3. Integrales impropias	197
3.6. Ejercicios	199
4. Espacios de Lebesgue	205
4.1. Espacio de funciones esencialmente acotadas	206
4.1.1. Supremo Esencial	206
4.1.2. Los espacios \mathcal{L}^∞	208
4.1.3. Los espacios L^∞ , normabilidad y convergencia	211
4.2. Espacios de funciones de potencia p -eme integrables	215
4.2.1. Espacios \mathcal{L}^p definiciones, ejemplos y propiedades	216
4.2.2. Espacios L^p normabilidad, convergencia y completitud	222
4.2.3. Desigualdades de Hölder y aplicaciones	228
4.2.4. Los espacios de Lebesgue L^p ($0 < p < 1$) y L	242
4.3. Propiedades adicionales	248
4.3.1. Comparación de modos de convergencia	249
4.3.2. Desigualdad de Jensen y aplicaciones	254
4.3.3. Convexidad y continuidad de la norma	258
4.4. Espacios de funciones localmente integrables	259
4.4.1. Definiciones y primeras propiedades	259
4.4.2. Estructura de los espacios locales	261
4.4.3. Relaciones de inclusión	262
4.5. Densidad y separabilidad de los espacios de Lebesgue	263
4.5.1. Definiciones y propiedades generales	264
4.5.2. Densidad en los espacios L^p con $1 \leq p < +\infty$	268
4.5.3. Densidad en los espacios L^∞	273

4.6. Espacios de Lebesgue discretos - espacios de sucesiones	276
4.6.1. Espacios de sucesiones	277
4.6.2. Propiedades de inclusión de los espacios ℓ^p	280
4.6.3. Densidad y de separabilidad en los espacios ℓ^p	282
4.7. Ejercicios	286
Bibliografía	291
Índice alfabético	293